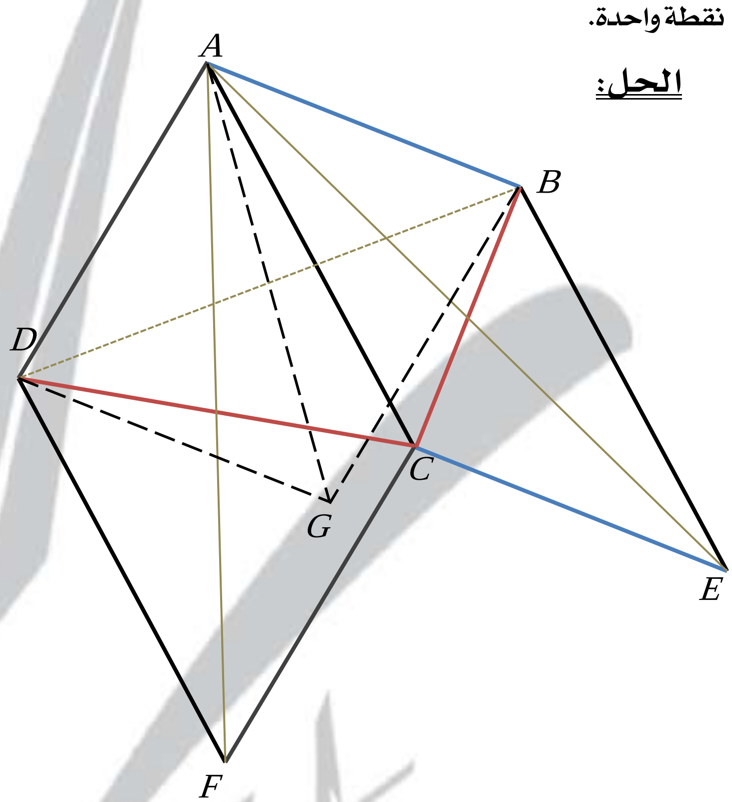
$\frac{11}{41}$ $ABCD$ رباعي وجوه ، و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب، و المطلوب :

❶. أثبت أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$

❷. أثبت أن للقطعتين $[BC]$ و $[CD]$ المنتصف نفسه.

❸. أثبت أن المستقيمات (BF)و(DE)و(CG) متلاقية في نقطة واحدة.

الحل:



❶. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$ لأن الرباعي $ADFC$ متوازي أضلاع

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$ لأن الرباعي $ACEB$ متوازي أضلاع

❷. نستنتج من العلاقتين السابقتين أن : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$

فالرباعي $DBEF$ متوازي أضلاع فقطراه $[DE]$ و $[FB]$ متناصفان

❸. الرباعي $DGEC$ متوازي أضلاع فقطراه $[CG]$ و $[DE]$ متناصفان.

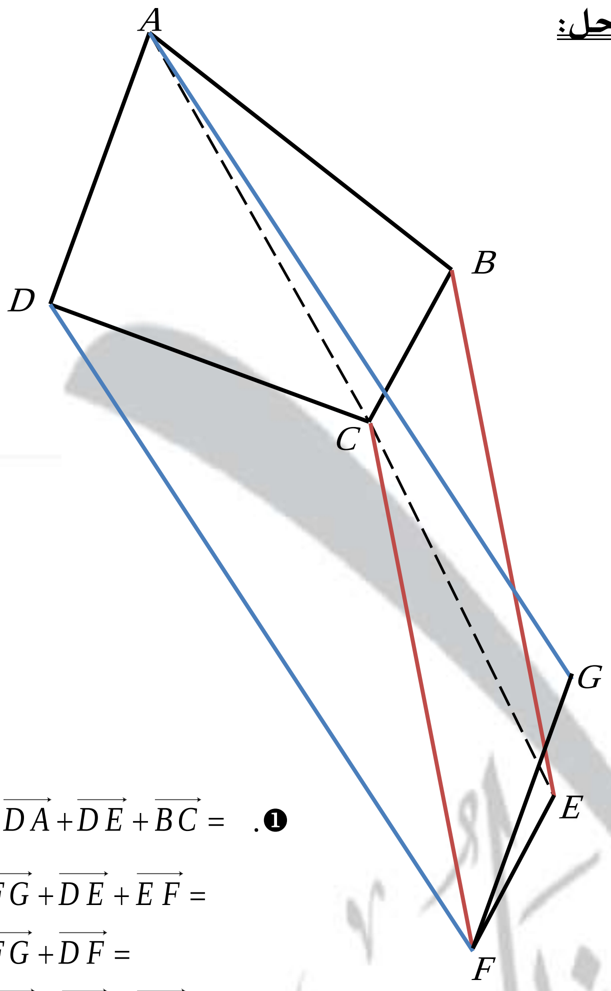
و نستنتج مما سبق أن القطع المستقيمة : $[BF]$ و$[DE]$ و$[CG]$ متناصفة ، فالمستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقية في نقطة واحدة

$\frac{12}{41}$ $ABCD$ رباعي وجوه ، و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C . F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي أضلاع.

❶. أثبت أن $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}$

❷. استنتج أن $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ ثم أن النقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد

الحل:



❶. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}=$

$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=$

$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DF}=$

$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DG}$

❷. نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DC}$ غير مرتبطين خطياً، لأنهما محمولان على ضلعين في المثلث BCD

و بما أن C منتصف $[AE]$ ، إذاً نستنتج أن:

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DC}$

و بالتعويض في العلاقة المبرهنة في الطلب الأول نجد:

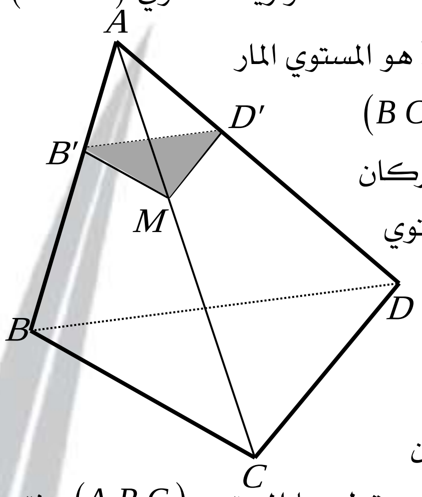
$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

فالأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DG}$ مرتبطة خطياً فهي في مستوٍ واحد، فالنقاط B و C و D و G مستوٍ واحد.

$\frac{24}{43}$ **نتأمل رباعي وجوه** $A\ B\ C\ D$

❶ M. نقطة من الحرف $[A\ C]$ ، جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي $(B\ C\ D)$:



الحل: نفرض P هو المستوي المار بالنقطة M موازياً $(B\ C\ D)$ فيكون الفصلان المشتركان لهذين المستويين مع المستوي القاطع لهما $(A\ D\ C)$ مستقيمان متوازيان.

أي: $(M\ D')\parallel(C\ D)$

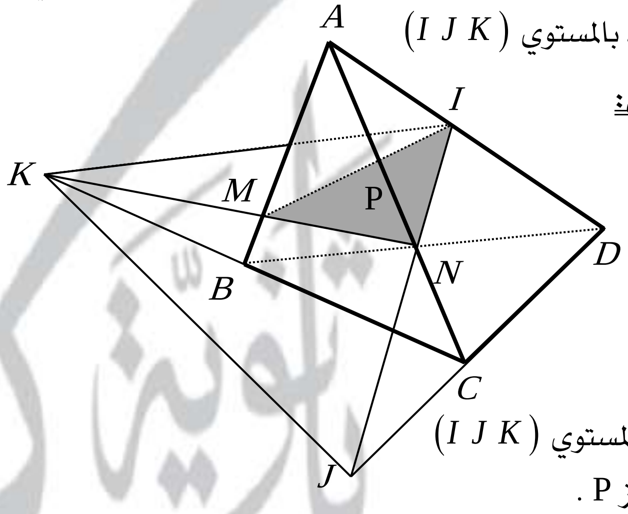
و بالمثل نجد أن المستويين P و $(D\ B\ C)$ المتوازيين يقطعهما المستوي $(A\ B\ C)$ وفق فصلين مشتركين متوازيين، أي أن : $(B'M)\parallel(B\ C)$

فالمقطع هو المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين $(M\ D')$ و $(M\ B')$. أي أن المقطع هو المثلث $M\ D'B'$.

- -

❷ I. نقطة من الحرف $[A\ D]$ و J نقطة من المستقيم $[C\ D]$ و K نقطة من المستقيم $(B\ C)$، عيّن مقطع رباعي الوجوه بالمستوي $(I\ J\ K)$

الحل:

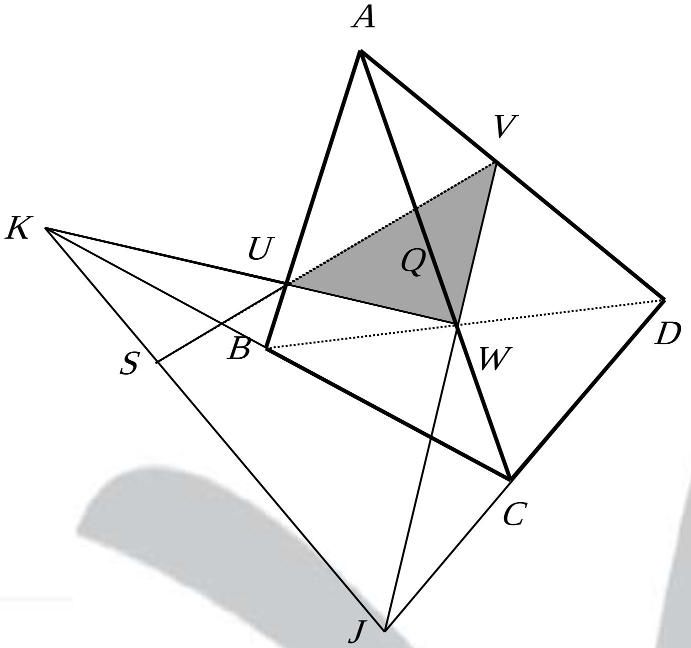


نرمّز المستوي $(I\ J\ K)$ بالرمز P .

I تنتمي إلى المستويين $(A\ D\ C)$و P و النقطة J كذلك إذاً: $(I\ J)$هو الفصل المشترك لهذين المستويين، ويقطع$[A\ C]$ في النقطة N ، و النقطتان N و K تنتميان إلى المستويين $(A\ B\ C)$و P ، إذاً $(N\ K)$ هو الفصل المشترك لهما و يقطع $[A\ B]$ في النقطة M، و النقطتان I و M تنتميان إلى المستويين$(A\ B\ D)$و P ، إذاً $(I\ M)$ هو الفصل المشترك لهذين المستويين و يكون المقطع هو المثلث $I\ M\ N$.

❸ L. نقطة من الحرف $(A\ B\ D)$ أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي $(K\ J\ L)$

الحل:



ليكن Q المستوي $(L\ J\ K)$ و لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين $(B\ D)$ و $(J\ K)$ ،

نلاحظ أن النقطتين L و S تنتميان إلى المستويين $(A\ B\ D)$و Q ،

إذاً المستقيم $(L\ S)$ هو فصلهما المشترك و يقطع$[A\ B]$ في النقطة U،

النقطتان U و K تنتميان إلى المستويين$(A\ B\ C)$و Q ،

إذاً المستقيم $(U\ K)$ فصلهما المشترك و يقطع$[A\ C]$ في النقطة W ،

و المستقيم $(S\ L)$ يقطع$[A\ D]$ في النقطة V ،

فيكون المستقيم $(W\ V)$ هو الفصل المشترك للمستويين $(A\ C\ D)$و Q .

فمقطع رباعي الوجوه بالمستوي Q هو المثلث $U\ V\ W$